Chapitre 13 – Comportement d'une suite

Table des matières

I Exercices

Comportement d'une suite – Exemples

1

La suite (u_n) est définie par $u_n = n^2 + n$

1. Utiliser un tableur pour obtenir la liste des termes de u_0 à u_{25}
2. Faire ensuite tracer par le tableur la représentation graphique de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) semble-t-elle croissante ? décroissante ? ni l'une ni l'autre ?
4. Les valeurs de u_n semblent-elles tendre vers $+\infty$ (devenir extrêmement grandes ?)
5. Les valeurs de u_n semblent-elles s'approcher d'un nombre ?

Rappels pour la représentation graphique

Sélectionner le tableau, menu « Insertion », cliquer sur « Diagramme… ».

Type de diagramme : cliquer sur « Lignes » puis sur « Points seuls », (ou sur « Points et lignes » selon les cas) puis sur « Suivant »

Plage de données : Cocher « Série de données en colonnes », « 1ère ligne comme étiquette », « 1ère colonne comme étiquette »
Cliquer sur « Terminer »

2

Meme exercice que le précédent avec les suites définies par

(1) $u_n = 0,6^n$ (2) $u_n = \dfrac{20n-1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ (3) $u_n = (-1)^n$ (4) $u_n = (-1,1)^n$

3

La suite (u_n) est la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{4 \times (-1)^{n+1}}{2n+3}$

1. Écrire u_1, u_2, u_3 sous forme de somme de fractions sans réduire au même dénominateur.
2. Utiliser un tableur pour obtenir la liste des termes de u_0 à u_{1000}
3. Faire ensuite tracer par le tableur la représentation graphique de la suite (u_n), en prenant seulement les termes de u_0 à u_{30}.
4. Les termes de cette suite s'approchent très lentement d'un nombre bien connu. Lequel ?

4 Méthode de Héron

Héron d'Alexandrie est un ingénieur, un mécanicien et un mathématicien grec du Ier siècle après J.-C.

La méthode de Héron consiste à calculer les termes successifs de la suite définie ci-dessous pour obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

La suite (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$

1. Écrire la valeur approchée de $\sqrt{2}$ donnée par la calculatrice : $\sqrt{2} \approx$ ....
2. Utiliser le tableur pour afficher les termes successifs de cette suite.
3. En combien d'étapes obtient-on la valeur donnée par la calculatrice ?

5

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_n = 5\,000 + 1000n$ et $v_n = 5000 \times 1,05^n$

Utiliser le tableur et une représentation graphique pour comparer les comportements de ces deux suites.

À partir de quel rang l'une dépasse-t-elle l'autre ?

6

1. Voici un algorithme :

Entrée : lire a
Traitement
n prend la valeur 0
u prend la valeur 1
Tant que $u > a$
    n prend la valeur $n + 1$
    u prend la valeur $0,6^n$
    Fin du Tant que
Sortie : afficher n.

a) Exécuter cet algorithme pour $a = 0,1$ en complétant le tableau ci-dessous.

$u > a$?							
n	0						
u	1						

b) Quel nombre est affiché en sortie ?

c) Que signifie ce nombre exactement ?

d) Programmer cet algorithme en Python ou à la calculatrice, puis le tester avec $a = 0,1$.

e) À partir de quel rang n a-t-on $0,6^n < 0{,}000\,000\,1$?

f) Comment évolue la valeur de $0,6^n$ lorsque n devient aussi grand qu'on veut ?

7

1. Écrire un algorithme qui permettent de déterminer dans l'exercice sur fiche n° 5 à partir de quel rang une suite dépasse l'autre. On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

2. En Python ou à la calculatrice, programmer cet algorithme puis l'exécuter.

Sens de variation d'une suite

8

On revient sur la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + n$ de l'exercice sur fiche n° 1.

Nous allons démontrer le sens de variation de cette suite de deux manières différentes.

1. **Première méthode : signe de $u_{n+1} - u_n$**

   Dire qu'une suite u est **croissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$ autrement dit que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

   a) Écrire $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n, puis développer et réduire l'expression sous la forme $an + b$

   b) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de n, et justifier que la suite (u_n) est croissante.

2. **Deuxième méthode : sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$**

   La suite (u_n) étant définie par $u_n = n^2+n$ la fonction f est la fonction définie par $f(x) = x^2+x$

   - Si la fonction f est **croissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite u est **croissante**.
   - Si la fonction f est **décroissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite u est **décroissante**.

   a) Justifier d'abord le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Rappels pour la représentation graphique sur calculatrice

- Le mode suite : touche mode, 4e ligne, `Suit` au lieu de `Fct`.
- Définition de la suite : touche $f(x)$, et compléter ainsi
  `nMin=0`
  `u(n)=n²+n`
  `uMin=`
- Réglage du tableau de valeurs : 2nde [déftable], `DébTable=0` et `PasTable=1`
- Tableau de valeurs : 2nde [table]
- Représentation graphique :
  Appuyer sur 2nde [format], et sélectionner `f(n)` en haut à gauche.
  Appuyer sur fenêtre et compléter
  On pourra prendre `nMin=0` et `nMax=25`, mêmes valeurs pour `Xmin` et `Xmax`, utiliser le tableau de valeurs (table) pour déterminer `Ymin` et `Ymax`
  Touche graphe

9

Dans l'exercice sur fiche n° 2, les représentations graphiques de plusieurs suites ont été obtenues à l'aide d'un tableur.

Nous allons maintenant démontrer leur sens de variation comme dans l'exercice précédent.

1. Démontrer le sens de variation suite définie par $u_n = 0,6^n$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, pour cela,

   a) écrire $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n, puis factoriser l'expression ;

   b) justifier le signe de $u_{n+1} - u_n$;

   c) en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. Démontrer le sens de variation suite définie par $u_n = \dfrac{20n-1}{n}$ $(n \geqslant 1)$ en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, pour cela,
   a) justifier d'abord que $u_n = 20 - \dfrac{1}{n}$
   b) écrire $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n, puis réduire au même dénominateur,
   c) justifier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
   d) en déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer le sens de variation suite définie par $u_n = \dfrac{20n-1}{n}$ en étudiant le sens de variation de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{20x-1}{x}$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.
4. Pour chacune des suites définies par $u_n = (-1)^n$ et $u_n = (-1,1)^n$, rappeler la réponse donnée dans l'exercice sur fiche n° 2, puis justifier.

10

Justifier le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous, par la méthode de son choix.

(1) $u_n = 3 \times 1,05^n$ (2) $u_n = \dfrac{1}{n}$ (3) $u_n = 4n + 7$ (4) $u_n = \dfrac{5}{n+6}$

Limite d'une suite – Exemples

11

La suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + n$, étudiée dans l'exercice sur fiche n° 1 semblait tendre vers $+\infty$.

La définition de l'expression « tendre vers $+\infty$ » n'est pas donnée au lycée, mais on peut donner l'idée suivante :

si je choisis un nombre positif a aussi grand que je veux, je pourrai toujours trouver un rang n, tel que à partir de ce rang n on a $u_n \geqslant a$.

Nous allons voir quelques exemples ci-dessous.

1. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la calculatrice, sans justifier.
   a) À partir de quel rang n a-t-on $n^2 + n \geqslant 1\,000$?
   b) À partir de quel rang n a-t-on $n^2 + n \geqslant 100\,000$?
   c) À partir de quel rang n a-t-on $n^2 + n \geqslant 10\,000\,000$?
2. À partir de quel rang n a-t-on $n^2 + n \geqslant 10^9$?
   Répondre en résolvant l'inéquation $n^2 + n \geqslant 10^9$.
   Indication : $n^2 + n \geqslant 10^9 \iff n^2 + n - 10^9 \geqslant 0$.
3. On peut aussi résoudre le problème à l'aide d'un algorithme.

```
Entrée : lire a
Traitement
n prend la valeur 0
u prend la valeur 0
Tant que u < a
    n prend la valeur n + 1
    u prend la valeur n² + n
    Fin du Tant que
Sortie : afficher n.
```

a) Exécuter d'abord cet algorithme pour $a = 25$ en complétant le tableau ci-dessous.

$u < a$?							
n	0						
u	0						

b) Quelle est le nombre affiché en sortie ?

c) Que signifie ce nombre exactement ?

d) Programmer cet algorithme à la calculatrice ou en Python, puis le tester pour $a = 25$, $a = 100\,000$ (une dizaine de secondes de calcul), $a = 10\,000\,000$ (un peu plus d'une minute de calcul).

12

La suite (u_n) est définie par $u_n = 3n^2 + 12n + 16$.

1. Observer la représentation graphique de cette suite à la calculatrice.

2. Cette suite semble-t-elle tendre vers $+\infty$?

3. À partir de quel rang a-t-on $3n^2+12n+16 \geqslant 10^6$? On utilisera un algorithme pour répondre.

a) Écrire cet algorithme sur le cahier en modifiant l'algorithme de l'exercice précédent.

b) Utiliser la calculatrice ou Python pour obtenir le résultat.

13

Pour chacune des suites définies ci-dessous indiquer sa limite ($+\infty$, $-\infty$ ou un nombre) ou indiquer qu'il n'y pas de limite.

On utilisera le tableur (de préférence) ou la calculatrice.

1. $u_n = -5n + 4$ **2.** $u_n = \dfrac{4n+7}{n}$ $(n \geqslant 1)$ **3.** $u_n = 1,3^n$

4. $u_n = 3 + 2 \times (-1)^n$ **5.** $u_n = n^3 - n$

14

Même exercice que le précédent avec la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,7u_n + 5$.

15

Nous allons étudier la suite de l'exercice précédent par un procédé graphique.

Explications

Dans le repère page suivante la fonction définie par $f(x) = 0,7x + 5$ est représentée par la courbe $\mathscr{D}_f$ et (d) est la droite d'équation $y = x$.

Le nombre u_0 est représenté par le point A sur l'axe des abscisses.

Les segments $[AB]$ et $[BC]$ permettent de construire l'image de u_0 par la fonction f, or $f(u_0) = u_1$, donc le point C représente u_1 sur l'axe des ordonnées.

On trace le segment $[CD]$. Le point D étant sur la droite (d) d'équation $y = x$ on sait que ses coordonnées sont $(u_1 \ ; \ u_1)$.

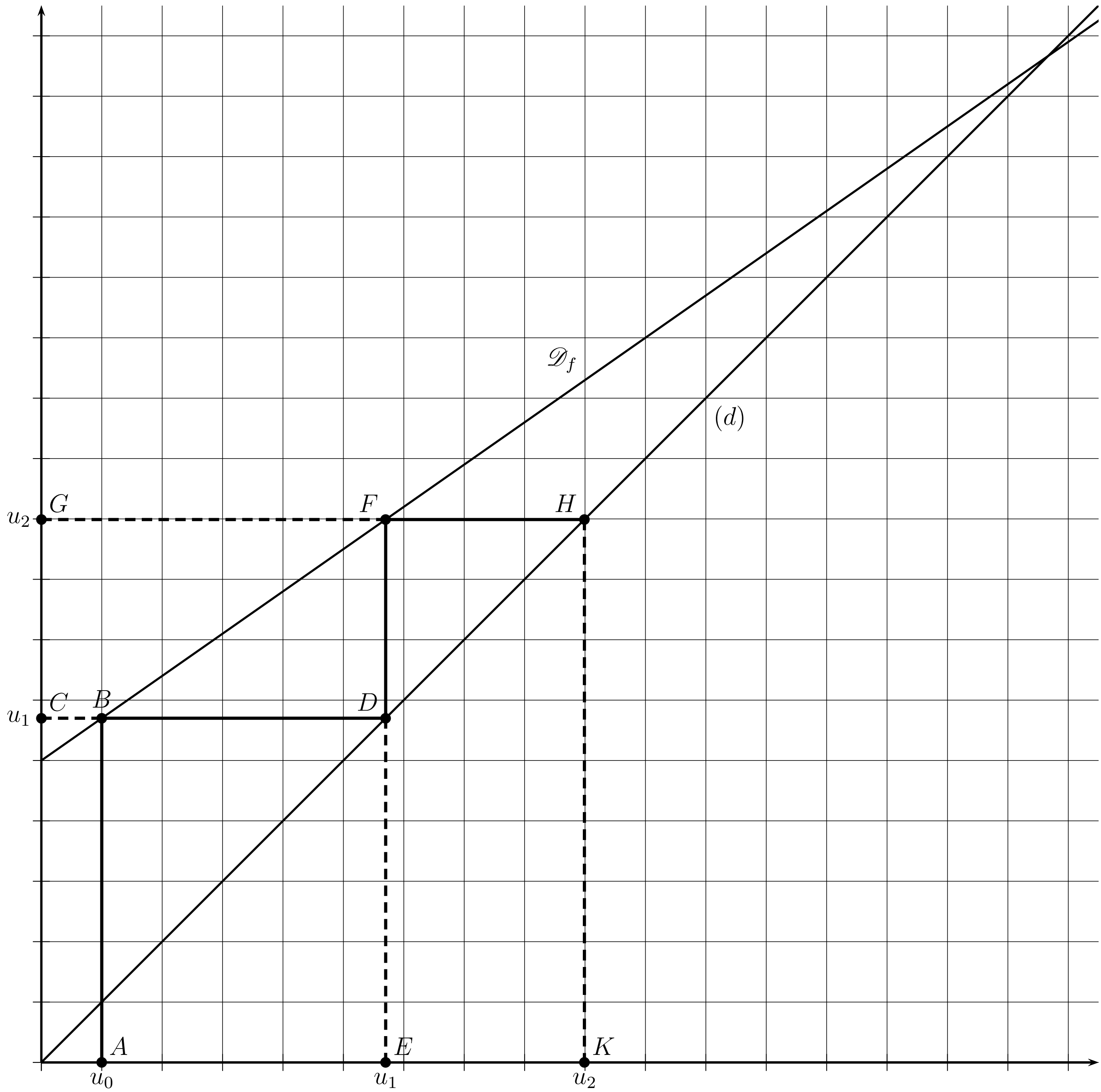
On trace le segment $[DE]$, et le point E représente donc u_1 sur l'axe des abscisses.

De manière analogue $f(u_1) = u_2$, et,

- les segment $[EF]$ et $[FG]$ permettent d'obtenir le point G qui représente u_2 sur l'axe des ordonnées ;
- les segment $[GH]$ et $[HK]$ permettent d'obtenir le point K qui représente u_2 sur l'axe des abscisses.

Consignes :

1. Poursuivre cette construction le plus loin possible, pour obtenir graphiquement les termes suivants u_3, u_4, u_5, … sur l'axe des abscisses.
2. Que constate-t-on ?



16

La construction de l'exercice précédent peut être faite à la calculatrice.

Il s'agit toujours de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,7u_n + 5$.

- Régler la calculatrice en mode suite.
- Définir la suite
  `nMin=0`
  `u(n)=0.7u(n-1)+5`
  `u(nMin)=1`
- Touche $\boxed{\text{2nde}}$ [format], et sélectionner `Esc` en haut.
- Touche $\boxed{\text{fenêtre}}$, compléter : `nMin=0 nMax=50`, et pour les autres valeurs, voir exercice précédent.

Appuyer sur $\boxed{\text{graphe}}$

On voit alors se tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction f.

Appuyer sur $\boxed{\text{trace}}$, puis plusieurs fois sur $\boxed{\rightarrow}$, ce qui trace un escalier ou une spirale.

17

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 3$.

1. Tracer un repère en prévoyant des abscisses et des ordonnées entre 0 et 16.
2. Tracer la droite d'équation $y = x$ et la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = 0,6x + 3$.
3. **a)** Étudier graphiquement cette suite en utilisant la méthode décrite dans l'exercice sur fiche n° 15.

   b) Cette suite a-t-elle une limite ($+\infty$, $-\infty$ ou un nombre) ? Si cette suite a une limite qui est un nombre, donner un arrondi au millième de ce nombre, en utilisant un tableur ou la calculatrice.
4. Reprendre la construction avec cette fois-ci $u_0 = 15$. Même question pour la limite éventuelle.

18

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -0,7u_n + 14$.

   a) Étudier graphiquement la suite à l'aide d'une figure sur le cahier ou à la calculatrice.

   b) Cette suite a-t-elle une limite ($+\infty$, $-\infty$ ou un nombre) ? Si cette suite a une limite qui est un nombre, donner un arrondi au millième de ce nombre, en utilisant un tableur ou la calculatrice.
2. Mêmes consignes (a) et (b) pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 3,5$ et $u_{n+1} = 1,4u_n - 1$.
3. Mêmes consignes (a) et (b) pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -1,1u_n + 10$.

II Cours

1 Sens de variation d'une suite numérique.

1a Définition

- Dire qu'une suite u est **croissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- Dire qu'une suite u est **décroissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- Dire qu'une suite u est **constante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$;

1b Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

C'est la méthode la plus générale, elle peut s'appliquer à tous les types de suites.

- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite u est **croissante**.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite u est **décroissante**.

Étudier le sens de variation d'une fonction

Cette méthode n'est valable que pour les suites où u_n est défini en fonction de n ($u_n = f(n)$).

Une fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ et pour pour tout entier naturel $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est **croissante** sur $[0~;~+\infty[$, alors la suite u est **croissante**.
- Si la fonction f est **décroissante** sur $[0~;~+\infty[$, alors la suite u est **décroissante**.

1c Exemple

Sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + n$

Première méthode : signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2+n) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2$

$2n + 2 \geqslant 0 \iff 2n \geqslant -2 \iff n \geqslant -1$

Or n est entier naturel donc $n \geqslant 0$, donc $n \geqslant -1$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$,

donc la $\boxed{\text{suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

Deuxième méthode : sens de variation de f telle $u_n = f(n)$

$u_n = n^2 + n$ donc $f(x) = x^2 + x$

$f'(x) = 2x + 1$

$2x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\dfrac{1}{2}$

donc la fonction f est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}~;~+\infty\right[$, donc la fonction f est croissante sur $[0~;~+\infty[$,

donc la $\boxed{\text{suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

2 Limite d'une suite – Exemples.

Voir les exercices sur fiche n° 11 à 18.