Chapitre 14 – Trigonométrie

Table des matières

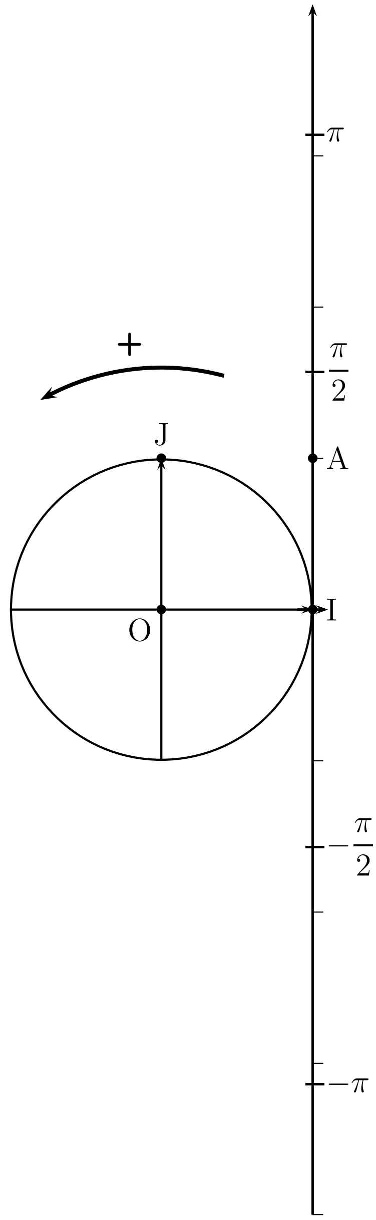
I Exercices

Cercle trigonométrique et mesure en radians

1

Le fichier GeoGebra nommé
`2de-Trigo_1-_Enroulement_de_la_droite_numerique.ggb`[1] *sera montré en classe, pour visualiser l'idée d' « enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique.*

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O de rayon 1. Sur ce cercle, le sens d'orientation positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le point A a pour coordonnées A (1 ; 1), et on imagine que la droite (IA) « s'enroule » sur le cercle trigonométrique.



1. Le nombre π sur la droite graduée (IA) est associé de cette manière au point B sur le cercle trigonométrique. Placer le point B sur la figure.
2. À quel point est associé
   (a) le nombre $\frac{\pi}{2}$? (b) le nombre 0 ?
3. Placer les points C, D associés respectivement à $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$.
4. On dit que le nombre $\frac{\pi}{4}$ est **la mesure en radians** de l'angle orienté $\widehat{IOC}$.
   (a) Tracer sur la figure l'angle $\widehat{IOC}$.
   (b) Quelle est sa mesure en degrés ?
5. Compléter le tableau ci-dessous.
6. Quel est le point E sur le cercle trigonométrique tel que la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOE}$ soit égale à $\frac{\pi}{2} + 2\pi$?
7. Donner deux autres mesures en radians de l'angle $\widehat{IOE}$ une positive, une négative.

Angle orienté de vecteurs	$\widehat{IOC}$	$\widehat{IOB}$	$\widehat{IOJ}$	$\widehat{IOI}$	$\widehat{IOD}$
Mesure en radians	$\frac{\pi}{4}$				
Mesure en degrés					

1. Fichier téléchargeable sur le site du lycée, adresse ci-dessous à droite.

2

Tracer un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 4 cm (ou 4 carreaux) et son cercle trigonométrique.

Placer les points correspondant aux nombres suivants.

(1) $\frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $-\frac{\pi}{6}$ (5) $\frac{5\pi}{4}$

3

Tracer un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 4 cm (ou 4 carreaux) et son cercle trigonométrique.

1. Placer les points correspondant aux nombres suivants.
   (a) $\frac{17\pi}{4}$ (b) $\frac{-13\pi}{2}$ (c) $\frac{26\pi}{3}$ (d) -11π (e) $\frac{43\pi}{6}$
2. Pour placer $\frac{17\pi}{4}$ on peut écrire le calcul suivant : $\frac{17\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{16\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi}{4} + 2 \times 2\pi$
   Le résultat est sous la forme : (un nombre entre $-\pi$ et π) $+ k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
   Écrire le même type de calcul pour (b), (c), (d), (e).

4

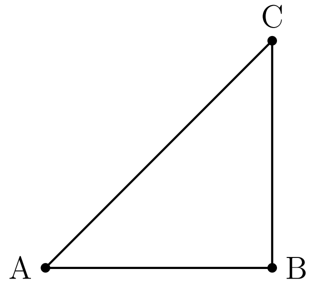
Chacun des nombres des exercices 2 et 3. est une mesure d'angle en radians.

Convertir ces dix mesures en degrés.

Cosinus et sinus

5

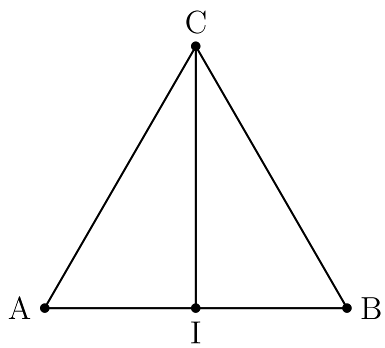
ABC est un triangle rectangle isocèle tel que :
AB = a et $\widehat{ABC} = -\frac{\pi}{2}$



1. Sans justifier, donner une mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. Démontrer que $AC = a\sqrt{2}$
3. Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6

Le triangle ABC est équilatéral, tel que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, et le point I est le milieu de [AB] et on appelle a la distance AB.



1. Démontrer que $CI = a\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. En utilisant les angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{ACI}$
   (a) démontrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
   (b) et démontrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7

1. Tracer un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 4$ cm et $AD = 7$ cm et $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{3}$ rad.
2. Calculer l'aire exacte du parallélogramme $ABCD$ (sous la forme $a\sqrt{b}$). Indication : tracer la hauteur du parallélogramme $ABCD$ issue de B, qui coupe (AD) en H, puis calculer BH.

8

Un cercle trigonométrique est tracé sur la figure 1. L'unité du quadrillage est 0,5.

1. Placer $\dfrac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique, en effectuant un tracé.
2. De la même manière, placer $\dfrac{3\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$.
3. D'après la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, placer $\dfrac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.
4. Placer $\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{2\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.
5. D'après la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, placer $\dfrac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique.
6. Placer $\dfrac{5\pi}{6}$, $-\dfrac{\pi}{6}$, $-\dfrac{5\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique.

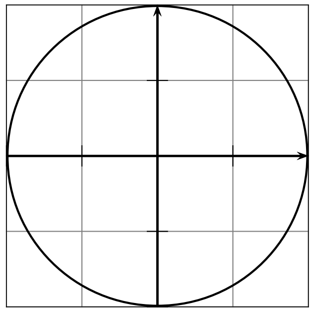


FIGURE 1

9

Pour répondre aux questions suivantes, on pourra s'aider de la figure 1.

1. Déterminer x sachant que $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ et que $\sin(x)$ est négatif.
2. Déterminer x sachant que $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\cos(x)$ est négatif.
3. Déterminer x sachant que $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$ et que $\cos(x)$ est positif.

II Cours

1 Rappels de collège

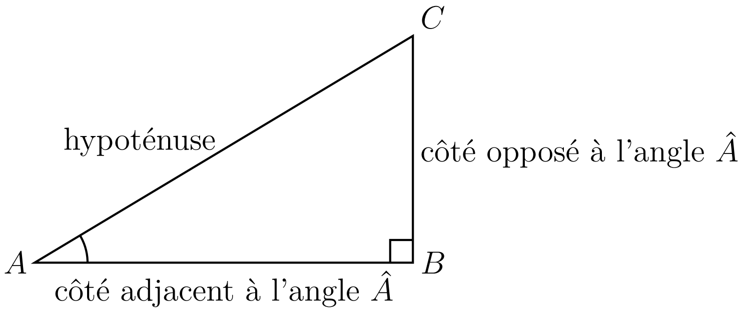
1a Définitions

Dans un triangle rectangle,

cosinus d'un angle aigu $= \dfrac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

sinus d'un angle aigu $= \dfrac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

tangente d'un angle aigu $= \dfrac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$



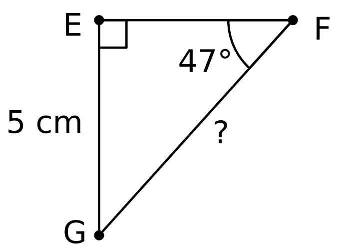
$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} \qquad \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$$
$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

Remarques :

— le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1 ;
— la tangente d'un angle aigu est un nombre positif ;
— la tangente de 90° n'existe pas.

1b Exemple de calcul de longueur

Calcul de la longueur FG dans le triangle rectangle EFG.



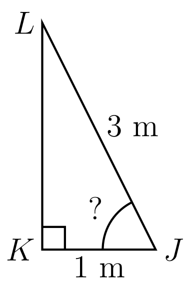
$$\frac{\sin 47°}{1} = \frac{5}{FG}$$

$$FG = \frac{1 \times 5}{\sin 47°}$$

$$FG \approx 6,836637305 \approx \boxed{6,8\text{cm}}$$

1c Exemple de calcul d'angle

Calculer l'angle $\widehat{KJL}$ dans le triangle rectangle JKL. Arrondir le résultat à l'unité près.



$$\cos(\widehat{KJL}) = \frac{KJ}{LJ} = \frac{1}{3}$$
$$\widehat{KJL} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \left(\text{ou } \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$
$$\widehat{KJL} \approx 70,52877937 \approx \boxed{71°}$$

1d Compléments

Propriété

On a les égalités suivantes entre le cosinus, le sinus et la tangente :

$(\cos \widehat{A})^2 + (\sin \widehat{A})^2 = 1 \qquad \tan \widehat{A} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$

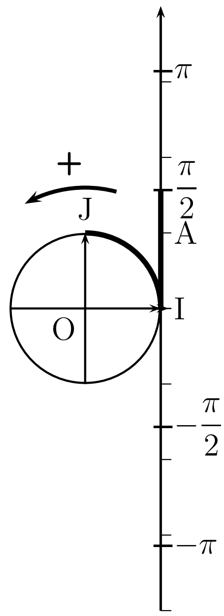
2 « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique

Définition

— Dans un repère orthonormé, on appelle cercle trigonométrique le cercle dont le centre est l'origine du repère et dont le rayon est 1.
— Sur ce cercle, le sens d'orientation positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

On considère maintenant un repère orthonormé (O, I, J), son cercle trigonométrique, le point A (1 ; 1), la droite graduée (IA), et on imagine que la droite (IA) « s'enroule » sur le cercle trigonométrique.

- Ainsi, à chaque nombre de la droite graduée (IA), on associe un point du cercle trigonométrique.
  Par exemple, le nombre $\dfrac{\pi}{2}$ correspond au point J sur le cercle trigonométrique, parce que $\dfrac{\pi}{2}$ est égal à la longueur du quart de cercle $\widehat{IJ}$, en effet la longueur du cercle trigonométrique est 2π et $\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.
- En revanche, à chaque point du cercle trigonométrique on peut associer une infinité de nombres sur la droite graduée (IA).
  Par exemple le point J correspond à $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} + 4\pi$, ... et le point J correspond aussi à $\dfrac{\pi}{2} - 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} - 4\pi$, ...
  Autrement dit le point J correspond à une liste infinie de nombres qui s'écrivent tous sous la forme $\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif.

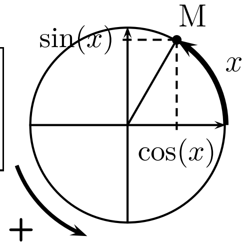


Plus généralement on peut dire que :

tout nombre réel x est associé à un point du cercle trigonométrique, et tous les nombres réels de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif, sont également associés à ce point.

3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

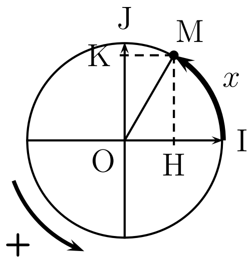
Définition



> Un point M du cercle trigonométrique est associé à un nombre réel x.
> - on appelle cosinus de x l'abscisse du point M ;
> - on appelle sinus de x l'ordonnée du point M.

Remarque

Au collège, le cosinus et le sinus ont été définis d'une autre façon : il s'agissait du cosinus ou du sinus d'un angle aigu, dans un triangle rectangle.
Si x est un nombre de l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, le point M associé à x sur le cercle trigonométrique est tel que l'angle $\widehat{IOM}$ est aigu, et les égalités ci-dessous font le lien avec le cosinus et le sinus dans le triangle rectangle.



$$\begin{cases} \cos\left(\widehat{IOM}\right) = \cos\left(\widehat{HOM}\right) = \dfrac{OH}{OM} = OH = \cos(x) \\ \sin\left(\widehat{IOM}\right) = \sin\left(\widehat{HOM}\right) = \dfrac{HM}{OM} = HM = OK = \sin(x) \end{cases} \qquad (OM = 1)$$

Propriétés

> Pour tout nombre réel x, $\quad (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1 \quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

Valeurs remarquables

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\widehat{AOM}$	0	30°	45°	60°	90°
$\cos(x)$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1

4 Utilisation de la calculatrice

	TI 82	TI 89	CASIO
Réglage en degré ou radian	mode 3e ligne.	mode 4e ligne, touche → choisir dans la liste	SHIFT [SET UP], descendre sur `Angle`, choisir avec F1 ou F2
Cosinus, sinus, tangente	*sin*, *cos*, *tan*	2ND [SIN] 2ND [COS] 2ND [TAN]	sin, cos, tan
Arcsinus, arccosinus, arctangente	2nde [*Arcsin*], 2nde [*Arccos*], 2nde [*Arctan*]	◆ [SIN^{-1}] ◆ [COS^{-1}] ◆ [TAN^{-1}]	SHIFT [Asn] SHIFT [Acn] SHIFT [Atn]