

Chapitre 12 – Vecteurs

Table des matières

I	Exercices	I-1
1	I-1
2	I-1
3	I-1
4	I-2
5	I-2
6	I-3
7	I-3
8	I-3
9	I-4
10	I-4
11	I-4
12	I-4
13	I-5
14	I-5
15	I-5
16	I-7
17	I-7
18	Vecteurs colinéaires	I-7
19	I-8
20	I-8
21	Coordonnées de vecteurs et coordonnées de points	I-8
22	I-8
23	I-8
24	I-9
25	Coordonnées de la somme de vecteurs	I-9
26	I-9
27	Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre.	I-9
28	I-9
29	I-9

II Cours	II-1
1 Translation et vecteurs	II-1
2 Égalité de deux vecteurs	II-1
3 Somme de deux vecteurs.	II-2
4 Produit d’un vecteur par un nombre réel.	II-2
5 Coordonnées de vecteurs	II-3
5a Exemple	II-3
5b Coordonnées d’un vecteur dans un repère du plan	II-3
5c Coordonnées de la somme de deux vecteurs	II-4
5d Coordonnées du produit d’un vecteur par un réel	II-4

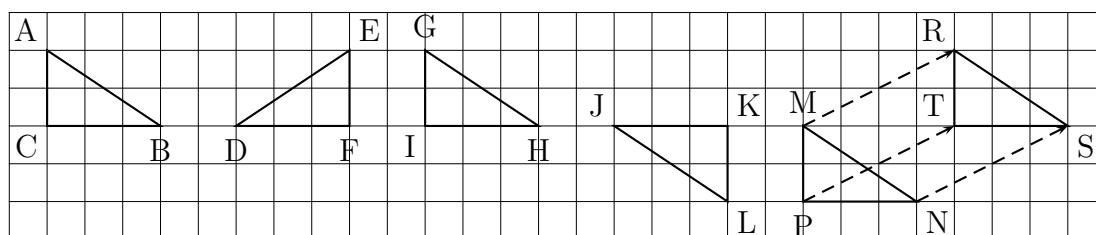
I Exercices

Translation et vecteurs

1

1. Le triangle DEF est l'image du triangle ABC par une transformation. Laquelle ?
2. Le triangle JKL est l'image du triangle GIH par une transformation. Laquelle ?

Le triangle RST est l'image du triangle MNP par une transformation qui s'appelle une **translation**. On dit que cette translation est celle qui transforme le point M en le point R. On dit aussi que cette translation est la translation de vecteur \overrightarrow{MR}



2

1. Figure 1 : on translate le triangle ABC de façon à amener le point A sur le point D. Tracer DEF l'image du triangle ABC par cette translation.
2. Figure 2 : tracer le triangle DEF, image du triangle ABC par la translation de vecteur \overrightarrow{GH} .

Figure 1

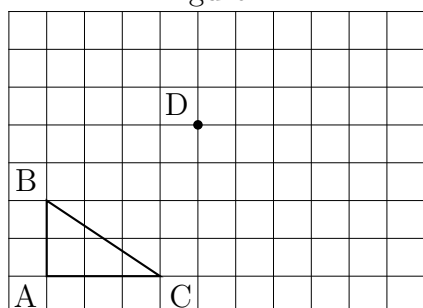
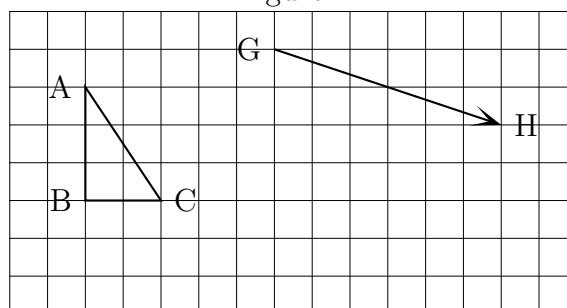
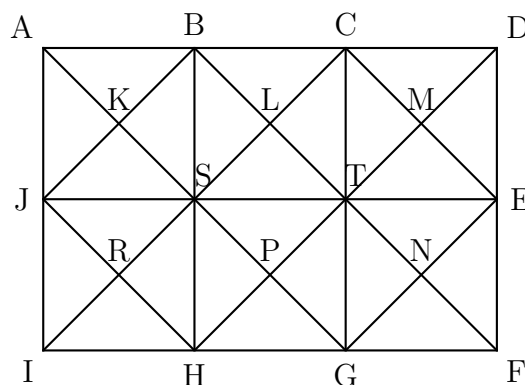


Figure 2



3

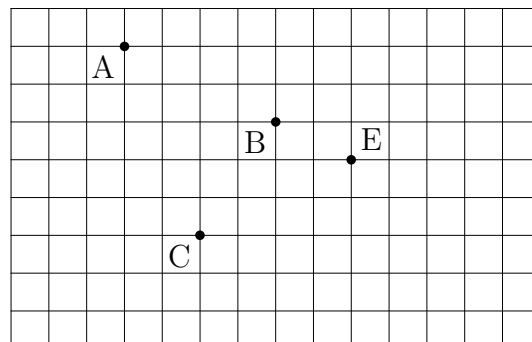
1. Quelle est l'image du triangle AJS par la translation qui transforme A en T ?
2. Quelle est l'image du triangle STG par la translation de vecteur \overrightarrow{JB} ?
3. Quelle est l'image du rectangle BDES par la translation qui transforme B en J ?
4. Quelle est l'image du triangle TNG par la translation de vecteur \overrightarrow{SB} ?



Égalité de deux vecteurs

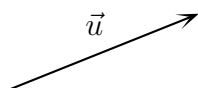
4

1. Tracer le point D image du point C par la translation qui transforme A en B.
2. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC (le tracer) ?
3. Que sait-on alors pour les segments [AD] et [BC] ?
4. Tracer le point F image du point E par la même translation.
5. Que constate-t-on pour le milieu du segment [AF] et le milieu du segment [BE] ?

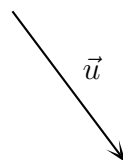


5

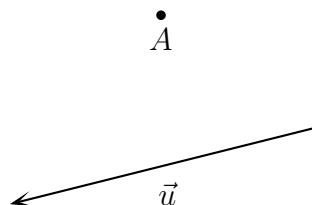
Construire chaque fois, à la règle et au compas, le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



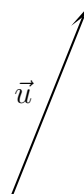
A



A



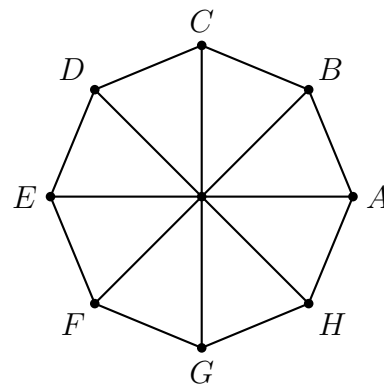
A



A

6

ABCDEFGH est un octogone régulier de centre O.
Compléter le tableau suivant par oui ou par non.



Les vecteurs	\vec{GH} et \vec{BC}	\vec{AE} et \vec{BD}	\vec{FD} et \vec{HB}	\vec{AH} et \vec{ED}
ont la même direction (sont « parallèles »)				
ont le même sens				
ont la même longueur				
sont égaux				

7

On utilise la figure de l'exercice sur fiche n° 6

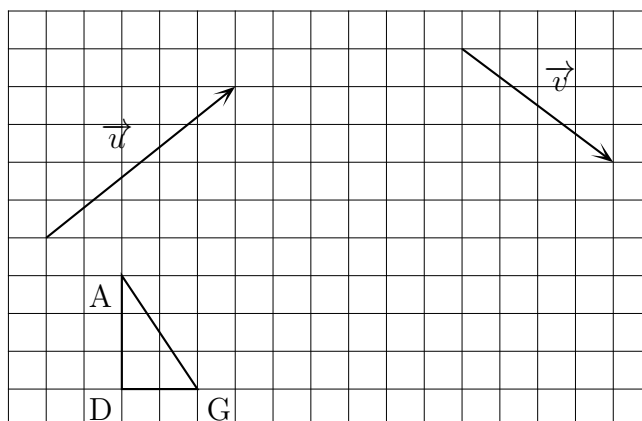
Indiquer chaque fois si l'affirmation est vraie ou fausse.

- (1) \vec{GH} et \vec{OB} sont égaux (2) \vec{GF} et \vec{OE} sont opposés
 (3) \vec{FE} et \vec{BA} sont opposés (4) \vec{AF} et \vec{DC} sont de sens opposés

Somme de vecteurs

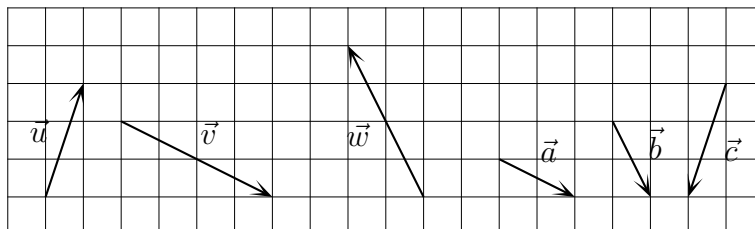
8

- L'image du triangle ADG par la translation de vecteur \vec{u} est le triangle BEH. Le tracer
- L'image du triangle BEH par la translation de vecteur \vec{v} est le triangle CFI. Le tracer.
- Tracer le vecteur \vec{w} de la translation qui transforme directement ADG en CFI. Ce vecteur \vec{w} est la somme des vecteurs \vec{u} et \vec{v} . $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
- Tracer les vecteurs \vec{AB} et \vec{BC} . On constate alors ce qu'on appelle la relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



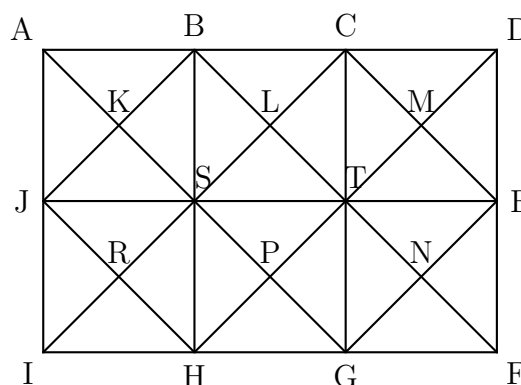
9

- Placer un point sur le quadrillage de son cahier, et à partir de ce point, construire la somme $\vec{u} + \vec{v}$.
- Même consigne, avec un nouveau point chaque fois, pour les sommes $\vec{v} + \vec{w}$ $\vec{u} + \vec{w}$ $\vec{v} + \vec{a}$
 $\vec{w} + \vec{b}$ $\vec{u} + \vec{c}$



10

- Compléter : $\vec{JB} + \vec{BH} = \dots$
 $\vec{DC} + \vec{CE} = \dots$ $\vec{FH} + \vec{HT} = \dots$
- Compléter :
 - $\vec{HS} + \vec{GE} = \vec{HS} + \vec{S...} = \vec{H...}$
 - $\vec{DC} + \vec{BS} = \vec{DC} + \vec{C...} = \vec{D...}$
 - $\vec{JS} + \vec{JB} = \vec{JS} + \vec{S...} = \vec{J...}$
 - $\vec{FG} + \vec{FB} = \vec{FG} + \vec{G...} = \vec{F...}$

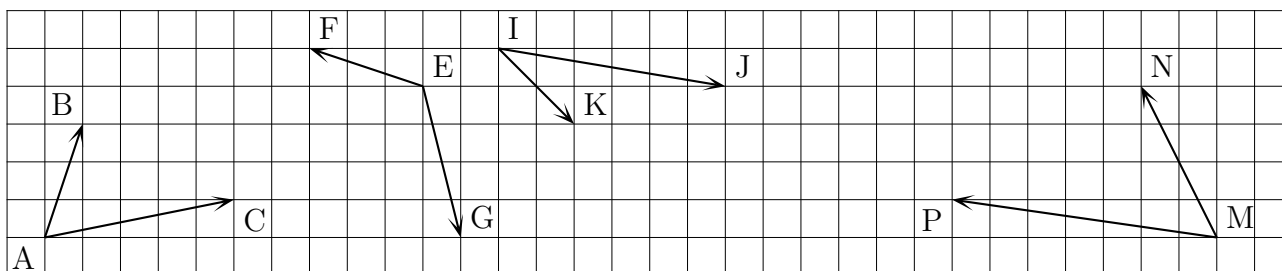


11

- Tracer un parallélogramme ABCD.
- Compléter : $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{B...} = \vec{A...}$
 Cette construction est une deuxième méthode de construction de la somme de deux vecteurs, c'est la *construction du parallélogramme*.

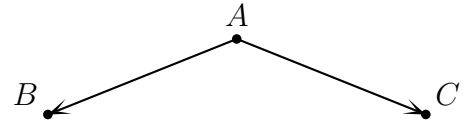
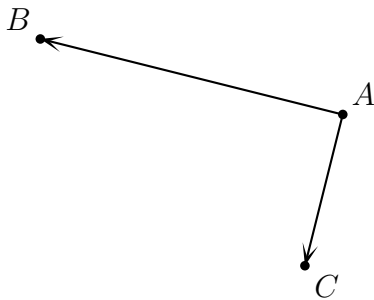
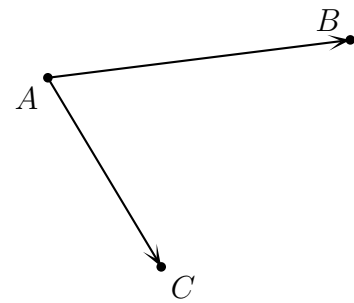
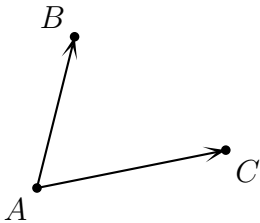
12

- Construire le point D tel que $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ en utilisant la construction du parallélogramme.
- Même consigne pour les points H, L, R tels que
 $\vec{EF} + \vec{EG} = \vec{EH}$ $\vec{IJ} + \vec{IK} = \vec{IL}$ $\vec{MN} + \vec{MP} = \vec{MR}$



13

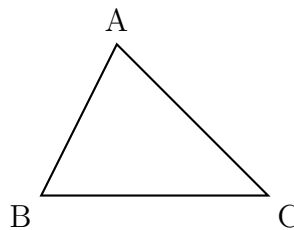
Construire chaque fois le point D tel que $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$



14

Construire à la règle et au compas les points D, E, F tels que :

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} \quad \vec{CE} = \vec{CA} + \vec{CB}.$$



15

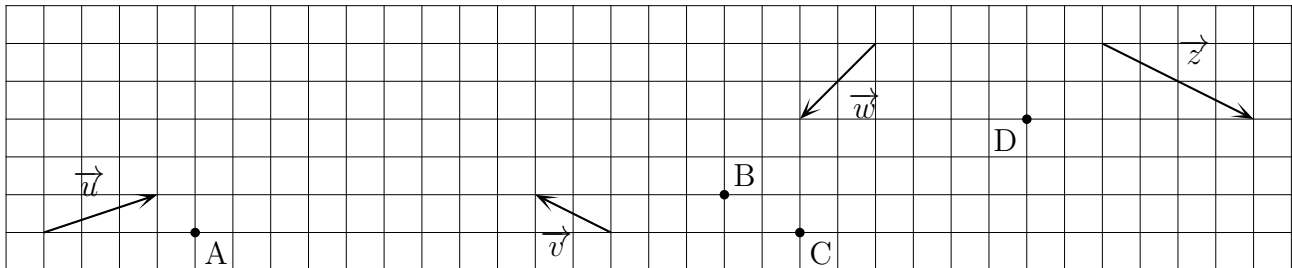
1. Sur une feuille non quadrillée, tracer un parallélogramme $ABCD$ de centre O .
2. Construire les points E et F tels que : $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OE}$ et $\vec{OC} + \vec{OD} = \vec{OF}$
3. Quelle est la nature des quadrilatères $OBEC$ et $OCFD$? Justifier.
4. Que peut-on dire du point C par rapport au segment $[EF]$? Le démontrer.

Exercices du manuel de mathématiques de 2^{de} Pixel, Bordas 2010, ex 27 à 38 p 213

Produit d'un vecteur par un nombre réel, vecteurs colinéaires

16

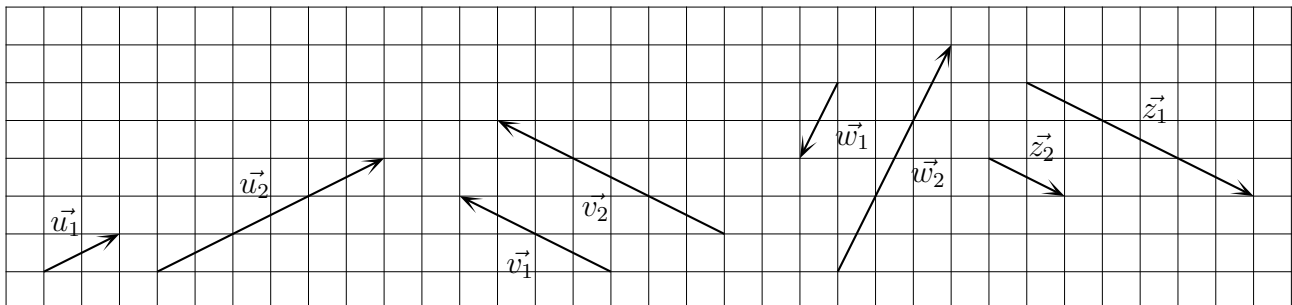
1. À partir du point A, tracer le vecteur $2\vec{u}$ ($2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$).
2. Tracer chaque fois le vecteur indiqué à partir du point indiqué.
 - (a) le vecteur $3\vec{v}$ à partir du point B ;
 - (b) le vecteur $-2\vec{w}$ à partir du point C ;
 - (c) le vecteur $1,5\vec{z}$ à partir du point D.



17

Déterminer chaque fois le nombre indiqué.

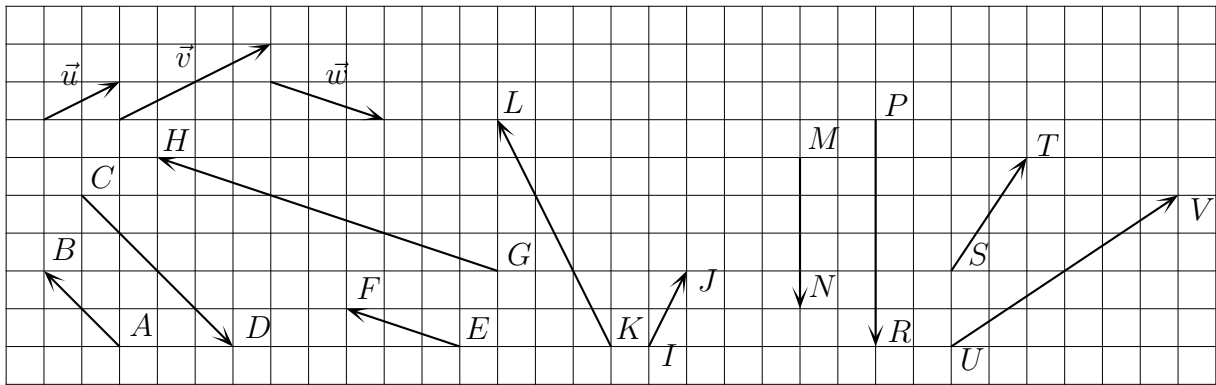
- (1) Le nombre k tel que $k\vec{u}_1 = \vec{u}_2$;
- (2) le nombre m tel que $m\vec{v}_1 = \vec{v}_2$;
- (3) le nombre n tel que $n\vec{w}_1 = \vec{w}_2$;
- (4) le nombre p tel que $p\vec{z}_1 = \vec{z}_2$;



18 Vecteurs colinéaires

Exemple et vocabulaire : sur la figure de la page suivante on dit que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires parce que $2\vec{u} = \vec{v}$. On a aussi $\frac{1}{2}\vec{v} = \vec{u}$. En revanche, les vecteurs \vec{u} et \vec{w} ne sont pas colinéaires parce qu'on ne peut pas trouver un nombre k ou un nombre k' tels que $\vec{u} = k\vec{w}$ ou $\vec{w} = k'\vec{u}$.

1. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont-ils colinéaires? Si la réponse est oui, donner le nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ou le nombre k' tel que $\overrightarrow{CD} = k'\overrightarrow{AB}$.
2. Même question pour les vecteurs
 - (a) \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{GH}
 - (b) \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{KL}
 - (c) \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PR}
 - (d) \overrightarrow{ST} et \overrightarrow{UV}



Coordonnées de vecteurs

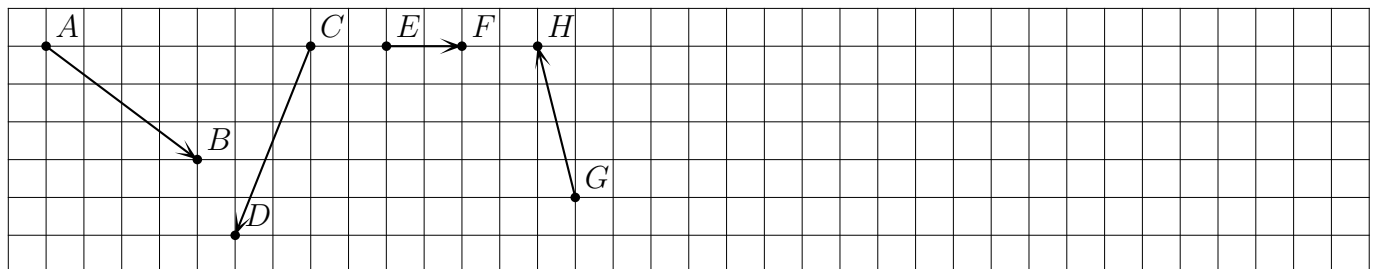
19

Exemple : dans l'exercice 17 voici deux exemples de coordonnées de vecteurs : $\vec{u}_1(2 ; 1)$ $\vec{v}_1(-4 ; 2)$

Indiquer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2, \vec{z}_2$ de l'exercice 17 et du vecteur \vec{MN} de l'exercice 18.

20

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{EF}, \vec{GH}$.
2. Tracer les vecteurs de coordonnées $\vec{IJ}(-2 ; -3), \vec{KL}(0 ; -4), \vec{MN}(6 ; 1), \vec{PR}(-1 ; -2)$.



21 Coordonnées de vecteurs et coordonnées de points

1. Tracer schématiquement la figure suivante : un repère (0, I, J) et les points A(13 ; 29) et B(31 ; 56).
2. Calculer les coordonnées du vecteur \vec{AB} .
3. Quand on a les coordonnées $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, comment calcule-t-on les coordonnées du vecteur \vec{AB} ?

22

1. Tracer un repère, placer les points A (-3 ; 2), B (7 ; 0), C (5 ; -4), D (-5 ; -2), puis tracer le quadrilatère ABCD.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et \vec{DC} .
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

23

1. Tracer un repère, et placer les points A (6 ; 2), B (8 ; -4), C (-4 ; 3).
2. Placer le point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Tracer ce parallélogramme.
3. Calculer les coordonnées du point D.

24

Dans un repère, les points A , C , E ont pour coordonnées : $A(-6 ; 2)$, $C(3 ; 6)$, $E(2 ; -3)$, et les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ont pour coordonnées $\vec{u}(4 ; 3)$, $\vec{v}(2 ; -5)$, $\vec{w}(-7 ; 1)$.

1. Tracer un repère, et placer les points A , C , E .
2. Placer les points B , D , F tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{w}$.
3. Calculer les coordonnées des points B , D , F .

25 Coordonnées de la somme de vecteurs

1. Dans l'exercice 12, indiquer les coordonnées des vecteurs
 (a) \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (b) \overrightarrow{EF} , \overrightarrow{EG} et $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$ (c) \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{IK} et $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK}$
2. Que constate-t-on pour les coordonnées de deux vecteurs et pour les coordonnées du vecteur somme ?

26

1. Tracer un repère (O, I, J) et placer les points $A(-2 ; -1)$, $B(-4 ; 3)$, $C(1 ; -3)$, $D(6 ; -2)$, $E(3 ; -1)$
2. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Tracer ces deux vecteurs.
3. Construire le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \vec{u} + \vec{v}$
4. Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{u} , \vec{v} , $\vec{u} + \vec{v}$.
5. Calculer les coordonnées du point F .

27 Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre.

1. Indiquer les coordonnées des vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , $2\vec{u}$, $3\vec{v}$, $-2\vec{w}$. de l'exercice 16.
2. Quand on a les coordonnées d'un vecteur \vec{u} et un nombre k , comment obtient-on les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$?

28

1. Tracer un repère (O, I, J) et placer les points $A(1 ; 2)$, $B(5 ; 1)$, $C(6 ; -3)$, $D(-2 ; -1)$.
2. Tracer les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} et calculer leurs coordonnées.
3. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont-ils colinéaires ? Justifier par un calcul.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

29

1. Tracer un repère et placer les points $A(1 ; 2)$, $B(4 ; 4)$, $C(10 ; 8)$, $D(-4 ; -1)$.
2. Tracer les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et calculer leurs coordonnées.
3. Les points A , B , C sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.
4. Les points A , B , D sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.

Exercices du manuel de mathématiques de 2^{de} Pixel, Bordas 2010, ex. 46 à 50, 53 à 58
p 214-215

Exercices du manuel de mathématiques de 2^{de} Pixel, Bordas 2010, ex. 19 à 28 p 212-213,
ex. 43, 44 p 214

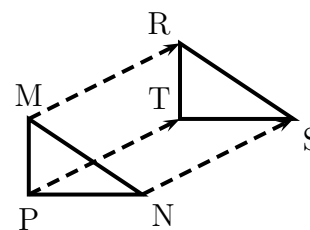
II Cours

1 Translation et vecteurs

Exemple

Dans la figure ci-contre, on dit que le triangle RST est l'image du triangle MNP par une transformation qui s'appelle une **translation**.

Intuitivement, on peut dire qu'on a fait glisser le triangle MNP sur le triangle RST, en ligne droite, sans tourner.

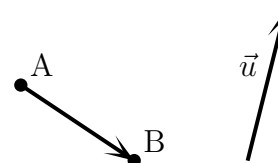


On dit aussi que cette translation est la translation **de vecteur** \overrightarrow{MR}

Vecteur

Pour un vecteur \overrightarrow{AB} , le point A est l'**origine** du vecteur et le point B est son **extrémité**.

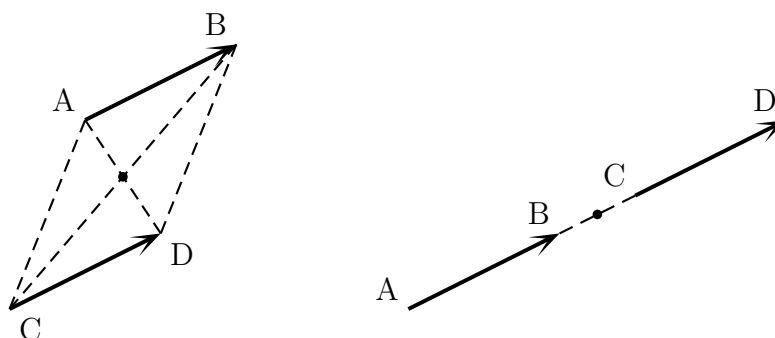
Un vecteur peut être nommé par son origine et son extrémité (comme \overrightarrow{AB}) ou par une seule lettre (comme \vec{u}).



Si les points A et B sont confondus, on obtient le vecteur \overrightarrow{AA} qui est le vecteur nul.

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

2 Égalité de deux vecteurs



Définition

Pour quatre points A, B, C, D, dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que c'est la même translation qui transforme A en B et C en D.

Propriété

Pour quatre points A, B, C, D, dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à dire que les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

Propriété

Pour quatre points A, B, C, D,

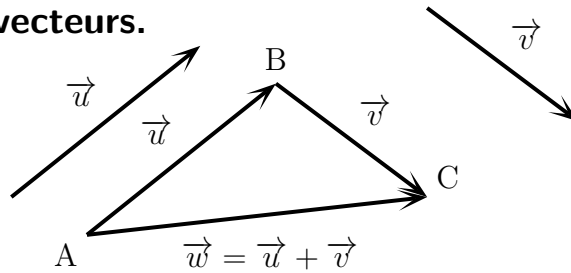
- si ABDC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- si A, B, C ne sont pas alignés, et si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme,

Propriété

Pour quatre points A, B, C, D, dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à dire que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD}

- ont la même direction (c'est à dire $(AB) \parallel (CD)$);
- sont de même sens;
- ont la même longueur.

3 Somme de deux vecteurs.



Définition

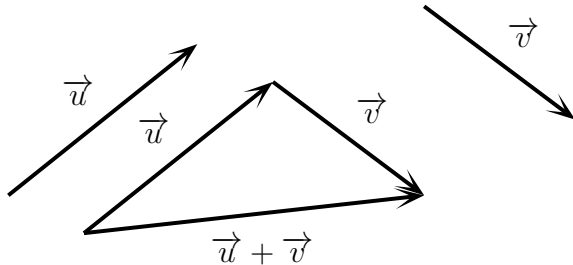
Si on enchaîne une translation de vecteur \vec{u} puis une translation de vecteur \vec{v} on obtient une translation de vecteur \vec{w} . On dit alors que ce vecteur \vec{w} est la somme des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Propriété – Relation de Chasles.

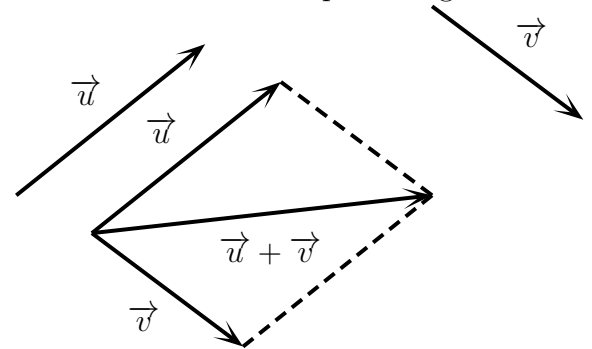
Pour trois points A, B, C, on a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Méthodes de construction de la somme de deux vecteurs.

Construction « bout à bout »

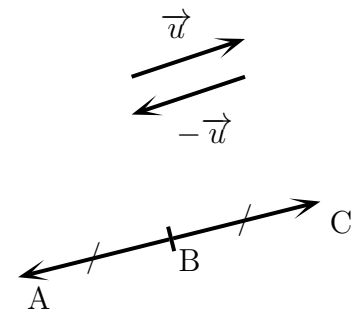


Construction du parallélogramme



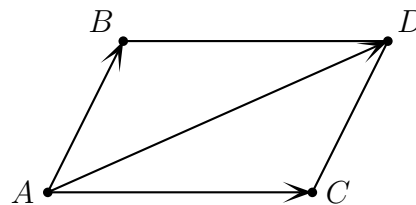
Opposé d'un vecteur

- L'opposé d'un vecteur \vec{u} s'écrit $-\vec{u}$
- Un vecteur et son opposé ont même direction, même longueur, et sont de sens opposés.
- Pour deux points A et B, $-\vec{AB} = \vec{BA}$
- Pour trois points A, B, C dire que $\vec{BC} = -\vec{BA}$ équivaut à dire que B est le milieu de [AC]
- Pour deux points A et B et pour un vecteur \vec{u} , on a les égalités : $\vec{AB} + (-\vec{AB}) = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ et $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$



Propriété

Pour quatre points A, B, C, D du plan,
 $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$
 si et seulement si
 ABCD est un parallélogramme

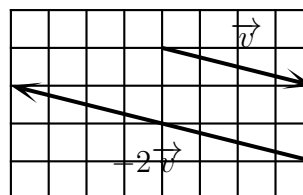
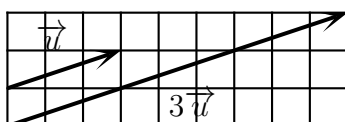


4 Produit d'un vecteur par un nombre réel.

$$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$$

$$-\vec{v} - \vec{v} = -2\vec{v}$$

Exemples



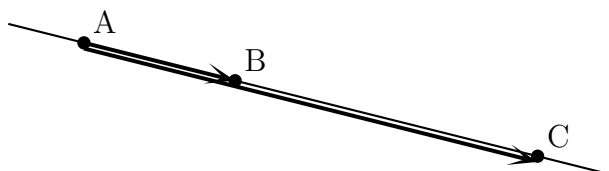
Remarque : si k est positif \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de même sens ; si k est négatif \vec{u} et $k\vec{u}$ sont de sens opposés.

Définition

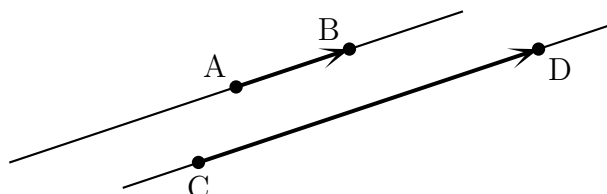
Dire que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires signifie que il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou qu'il existe un nombre k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$

Propriété – Alignement et parallélisme

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.



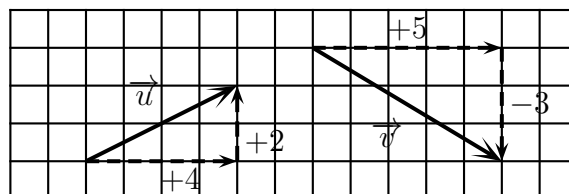
Pour quatre points A, B, C, D, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.



5 Coordonnées de vecteurs

5a Exemple

Les coordonnées du vecteur \vec{u} sont $\vec{u} (4 ; 2)$
 Les coordonnées du vecteur \vec{v} sont $\vec{v} (5 ; -3)$



5b Coordonnées d'un vecteur dans un repère du plan

Propriété

Pour deux points A et B de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ dans un repère du plan, les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$

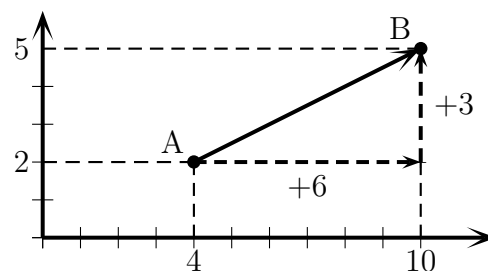
Exemple

Dans le repère ci-contre, les coordonnées de A et B sont A (4 ; 2) et B (10 ; 5).

Calcul des coordonnée du vecteur \vec{AB} :

$$x_B - x_A = 10 - 4 = 6 \quad y_B - y_A = 5 - 2 = 3$$

Les coordonnée du vecteur \vec{AB} sont donc $\vec{AB} (6 ; 3)$



5c Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Pour deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de coordonnées $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x' ; y + y')$

Exemple

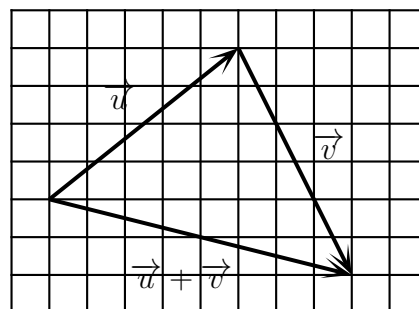
Dans la figure ci-contre, les coordonnées de \vec{u} et \vec{v} sont :

$\vec{u}(5 ; 4)$ et $\vec{v}(3 ; -6)$

Calcul des coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$:

$5 + 3 = 8$ $4 + (-6) = -2$

Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont donc $\vec{u} + \vec{v}(8 ; -2)$



5d Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Propriété

Pour un vecteur \vec{u} de coordonnées $(x ; y)$, les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $(kx ; ky)$.

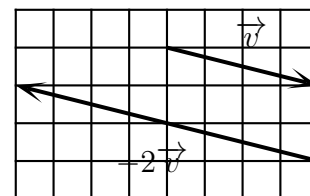
Exemple

Dans la figure ci-contre, les coordonnées de \vec{u} sont $\vec{u}(4 ; -1)$

Calcul des coordonnées du vecteur $-2\vec{u}$:

$(-2) \times 4 = -8$ $(-2) \times (-1) = 2$

Les coordonnées du vecteur $-2\vec{u}$ sont donc $-2\vec{u}(-8 ; 2)$



Remarque

Pour un vecteur \vec{u} et un nombre k , on sait que les vecteurs \vec{u} et $k\vec{u}$ sont colinéaires, et que leurs coordonnées $(x ; y)$ et $(kx ; ky)$ sont proportionnelles, puisque x et y sont multipliés par le même coefficient k .

On a donc la propriété ci-dessous.

Propriété

Deux vecteurs colinéaires ont des coordonnées **proportionnelles**.

Exemple : comment justifier, avec des coordonnées, si des vecteurs sont colinéaires ou non ?

Dans la figure ci-contre, les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ont pour coordonnées $\vec{u}(7 ; 2)$, $\vec{v}(9 ; 6)$, $\vec{w}(6 ; 4)$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires ?

Deux vecteurs colinéaires ont des coordonnées proportionnelles, on calcule donc les produits en croix des coordonnées :

$7 \times 6 = 42$ $2 \times 9 = 18$ Les produits en croix sont différents,

donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont-ils colinéaires ?

On calcule les produits en croix des coordonnées :

$9 \times 4 = 36$ $6 \times 6 = 36$ Les produits en croix sont égaux, donc les vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont colinéaires.

